

АВИЛТАЙ НАУРЫЗБАЙ

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «8D05401-Математика»

Математика изучает математическую модель природных процессов. Каждая математическая модель—это приближение на каком-то уровне. При построении математической модели делается попытка отразить наиболее существенные, приоритетные черты рассматриваемого процесса. С другой стороны, аналитические или численные расчеты должны быть достаточно «простыми», чтобы предоставить необходимую информацию о процессе.

Актуальность исследования. Интерес к сингулярно возмущённым уравнениям объясняется тем, что они служат математическими моделями процессов диффузии, химической кинетики, математической биологии, физики, гидродинамики, техники и многих других прикладных задач. В качестве примеров можно привести реальные ситуации: сингулярные волны возникают при внезапном приложении силы — так, землетрясение может вызвать катастрофическое цунами; резкое изменение температуры способно породить тепловое цунами в пористом материале; поведение нелинейного осциллятора в сингулярных условиях представляет особый интерес. В настоящее время сингулярные волновые движения являются одной из актуальных тем математических исследований, особенно в контексте квази-периодических бифуркаций, сингулярных диссипаций и других явлений. В работах Л. Шлезингера, Г. Д. Биркгофа, П. Ноайона, В. Васова, А. Х. Найфа, А. Н. Тихонова, М. И. Вишика, Л. А. Люстерника, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузова, Р. Э. О'Мэлли, Д. Р. Смита, В. Экхауса, К. В. Чанга, Ф. А. Хауса, Дж. Кеворкяна, Дж. Д. Коула, Дж. Сандерса, Ф. Верхулста, Е. Ф. Мищенко, Н. Розова, С. А. Ломова, М. И. Иманалиева и К. А. Касимова была создана и развита теория уравнений этого типа.

Рассмотрим следующую модель сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon z' = f(z, y, t),$$

$$y' = g(z, y, t),$$

где ε — малый положительный параметр. В литературе результаты, основанные на этой системе, получили название теорем Тихонова. Существуют различные асимптотические методы приближения решений сингулярно-возмущённых задач, позволяющие строить равномерные приближения с любой заданной точностью. В результате проведённых исследований был разработан метод граничных функций (также известный как метод граничного слоя). Если в рассматриваемой области выполняются условия теоремы Тихонова, то для решения сингулярно-возмущённых задач применим метод граничных функций.

Основные результаты настоящей диссертации получены с использованием именно этого метода.

Байнов и Ковачев впервые расширили импульсный аналог теоремы Тихонова следующим образом

$$\varepsilon z' = f(z, y, t), \quad \Delta z|_{t=t_i} = I_i(y(t_i)), \quad (1a)$$

$$y' = g(z, y, t), \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(y(t_i)), \quad (1b)$$

где $i = 1, 2, \dots, p$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$. Импульсная система состоит из дифференциальных уравнений (1a) и импульсных уравнений (1b). В предыдущих статьях и книгах рассматривались системы, в которых малый параметр присутствовал только в дифференциальных уравнениях, но не участвовал в импульсной части. То есть, в этих системах только дифференциальная часть была сингулярно возмущенной.

Ахмет и Чаг в литературе впервые рассмотрели следующую систему, в которой помимо дифференциального уравнения импульсная часть также является сингулярной:

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= f(z, y, t), & y' &= g(z, y, t), \\ \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= I(z, y, \varepsilon), & \Delta y|_{t=\eta_j} &= J(z, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где ε – положительный малый параметр, z, f и I – m размерные функции, y, g и J – n размерные функции, $\theta_i, i = 1, 2, \dots, p$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T$ – разрывные моменты в интервале $(0, T)$, z^0 и y^0 – независимо от ε .

Кроме того, задаются следующие условия, гарантирующие, что импульсная функция не обращается в бесконечность при стремлении малого параметра к нулю:

$$\lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, y, 0)} \frac{I(z, y, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \text{ и } \lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, y, 0)} \frac{I(z, y, \varepsilon)}{\varepsilon} = I_0 \neq 0, \quad (*)$$

В соответствии с этим условием рассматриваются два случая: однослойная и многослойная сингулярность.

В настоящей диссертации рассматриваются не только сингулярные дифференциальные уравнения, но и сингулярно-возмущённые импульсные системы. Целью работы является построение полного асимптотического ряда решения сингулярно-возмущённой импульсной системы с произвольной заданной точностью.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является построение асимптотического разложения решения исходной задачи для сингулярно-возмущённых импульсных дифференциальных уравнений, а также выявление её характерных особенностей.

Объект исследования. Начальная задача для сингулярно-возмущённых импульсных дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются эффективные комбинации современных методов, включая:

- асимптотические методы интегрирования сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений;

- общую теорию дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями;
- метод пограничного слоя;
- теорию импульсных дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Дифференциальные уравнения с малым параметром при высших производных стали предметом исследования многих учёных, что обусловлено их важной прикладной ролью в гидродинамике (уравнение Навье–Стокса), радиотехнике и других областях механики, физики и техники (уравнение Шрёдингера).

Сингулярно возмущённые импульсные дифференциальные уравнения позволяют адекватно описывать широкий спектр природных и технических явлений. Среди них — управление хаосом и бифуркациями в инженерных системах, моделирование импульсного возникновения эпидемий, моделирование и управление сложными динамическими системами и др.

Так как сингулярно-возмущённые импульсные дифференциальные уравнения обладают высокой степенью сложности, нахождение их точных решений представляет значительные трудности. В связи с этим исследование таких задач сохраняет высокий уровень актуальности и представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Научная новизна. Основные результаты, предложенные к защите. В диссертационной работе рассмотрены задачи в ранее не исследованных постановках, получены новые результаты, которые выносятся на защиту:

- Построено асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно-возмущённых линейных импульсных дифференциальных уравнений;
- Построено асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно-возмущённых нелинейных импульсных дифференциальных уравнений;
- Разработан алгоритм, позволяющий определять условия существования и построения асимптотической аппроксимации решений импульсных дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями;
- В зависимости от свойств импульсной функции выявлены и описаны однослойные и многослойные пограничные сингулярные явления;
- Доказана обоснованность построенной асимптотики решений;
- Проведено численное моделирование, иллюстрирующее полученные результаты и подтверждающее их применимость;

Аппробация. Результаты диссертационной работы были представлены на международной научной конференции «Мир Фараби» (Алматы, Казахстан, 6-8 апреля 2021 г.), на международной научной конференции «Мир Фараби» (Алматы, Казахстан, 6-7 апреля 2023 г.), на международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» (Ош, Кыргызстан, 26-27 сентября 2024 г.), на международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа—2024» (Уфа, Россия, 2-5 октября 2024 г.), «На традиционной апрельской математической конференции, посвящённой 80-

летию Института математики и математического моделирования и приуроченной ко Дню науки» (Алматы, Казахстан, 1–4 апреля 2025 г.), а также на научном семинаре кафедры математики механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, где была сделана презентация и проведено обсуждение.

Научные выводы, их достоверность и обоснованность. Результаты, полученные в ходе исследования, подтверждаются доказательствами, ранее представленными известными учеными, публикациями в индексируемых международных журналах и материалами конференций.

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 12 работ:

- *Публикации в изданиях, включенных в базы данных Web of Science и Scopus:*

1. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // Carpathian Journal of Mathematics. –2024,–40, no. 3, 581 – 598.

2. Asymptotic convergence of solutions for singularly perturbed linear impulsive systems with full singularity // Symmetry. 2025; 17(9):1389. Scopus: 93%, Web of Science: Q2.

3. A case of impulsive singularity // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, [S.l.], v. 117, n. 1, apr. 2023. ISSN 2617-4871

4. Asymptotic behavior of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, [S.l.], v. 112, n. 4, dec. 2021. ISSN 2617-4871.

5. Asymptotic expansion of the solution for singular perturbed linear impulsive systems // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, –2024, –122(2), 14–26.

6. Asymptotic solutions to initial value problems for singularly perturbed quasi-linear impulsive systems// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2025; 127(3): 13–28. Scopus: 18%, Web of Science: Q4.

- *Публикации в материалах международных научных конференций:*

1. Асимптотический характер решения краевой задачи для сингулярно возмущенного интегрально-дифференциального уравнения // Международная научная конференция «ФАРАБИ ӘЛЕМІ», Алматы, 7-8 апреля 2021 года: тезисы докладов (Алматы – 2021. – 12 с.).

2. Система сингулярно возмущенных импульсных дифференциальных уравнений // Международная научная конференция «ФАРАБИ ӘЛЕМІ», Алматы, 7-8 апреля 2023 года: тезисы докладов (Алматы – 2023. – 5 с.).

3. Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании», г. Ош, Кыргызстан, 26-27 сентября 2024 года: тезисы докладов (Ош – 2024. – 17 с.).

4. Асимптотическое разложение решения задачи для сингулярно возмущенных линейных импульсных систем с сингулярными импульсами // Международная конференция «Уфимская осенняя математическая школа—2024», г. Уфа, Россия, 2-5 октября 2024 года: тезисы докладов (Уфа – 2024. – 2 том, 7-8 с.)

5. Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // Тезисы докладов «Традиционная апрельская математическая конференция, посвящённая 80-летию Института математики и математического моделирования ко Дню науки» (Алматы, Казахстан, 1–4 апреля 2025 г.). – Алматы, 2025. – С. 82.

6. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // X Международная научная конференция «Математика, механика и информационные технологии», Казахстан, Алматы, 24–26 сентября 2025.

По результатам диссертационного исследования было опубликовано 6 работы, среди которых: – 1 статья, включенная в первый (Q1) квартиль по данным Clarivate Analytics Journal Citation Reports и/или имеющая CiteScore 81 в базе данных Scopus, – 1 статья, включенная в первый (Q2) квартиль по данным Clarivate Analytics Journal Citation Reports и/или имеющая CiteScore 93 в базе данных Scopus и 4 статьи в научных журналах, включенных в квартиль (Q4) с процентилем 18; – 6 публикации в сборниках тезисов международных конференций.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из списка нормативных ссылок, введения, двух основных разделов (каждый из которых включает подразделы), заключения и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 81 страницу.

Содержание диссертации. Во **введении** раскрываются актуальность и научная новизна темы исследования, формулируются цель и задачи работы, указываются методы исследования, теоретическая и практическая значимость, а также приводится краткая характеристика содержания диссертационного исследования.

В **первом разделе** рассматривается асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно возмущённых импульсных линейных дифференциальных уравнений. Определяется алгоритм нахождения приближающих членов решения. Далее формулируется аналог теоремы Бутузова–Васильева и доказывается существование и единственность решения.

В **подразделе 1.1** анализируется начальная задача для сингулярно возмущённых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Определяется однослойное сингулярное явление.

В **подразделе 1.2** анализируется начальная задача для сингулярно возмущённых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Определяется многослойное сингулярное явление.

Во **втором разделе** исследуется начальная задача для импульсных дифференциальных уравнений с сингулярно возмущёнными нелинейными коэффициентами. Определяются однослойные и многослойные сингулярные явления, связанные с импульсной функцией. Для подтверждения теоретических результатов приводятся численные примеры, полученные с помощью моделирования.

В **заключении** сформулированы основные выводы и результаты, полученные в ходе выполнения диссертационного исследования.